CONTEXTOS, DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E SABERES PRESENTES NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

José Ronaldo Melo
Universidade Federal do Acre (UFAC)
ronaldo.ufac@gmail.com

1 . Introdução

A História da Matemática, atualmente, tem sido sugerida por estudiosos da Educação Matemática e defensores de alternativas ao ensino tradicional como uma possibilidade que pode ajudar o professor no planejamento de atividades voltadas para estimular a aprendizagem matemática de alunos em diversas situações que emergem na sala de aula, contribuindo para uma ação pedagógica significativa e para compreensão de inúmeros conceitos, sobretudo, quando são tomados como fonte de investigação sobre a origem do seu processo de produção.

Neste sentido, é possível encontrar na literatura e nas orientações estratégicas para o ensino uma vasta argumentação que toma a Matemática como um produto da criação humana e que se apropria da lógica de seu desenvolvimento histórico favorecendo ao aluno uma aprendizagem significativa. Grande parte desses argumentos está presente, especialmente, em documentos oficiais e na literatura relativa à pesquisa educacional.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), por exemplo, principal documento do Ministério da Educação, relacionado com orientações curriculares e

Doutor em Educação Matemática. Professor da UFAC dede 1989. E-mail: ronaldo.ufac@gmail.com

estratégias de ensino e destinado aos professores de Matemática do Ensino Fundamental, defende que:

> [...] a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino aprendizagem, sobretudo ao revelar a Matemática como uma criação, mostrando as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos e estabelecendo comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente (BRASIL, 1998, p. 42).

O processo de compreensão de conceitos matemáticos pautado pela lógica do desenvolvimento histórico da Matemática pode incentivar os futuros professores, hoje em processo de formação, a perceber que as dificuldades de se ensinar matemática podem estar relacionadas com a organização e apresentação sintética dos conhecimentos matemáticos. Pode mobilizar os alunos a compreender que:

> [...] as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização (VIANA&SILVA 2007, p. 3).

Os conceitos matemáticos abordados a partir do desenvolvimento histórico, planejados para reflexão em sala de aula, podem contribuir para uma melhor contextualização de muitos aspectos da Matemática, levando o aluno a relacionar esse importante campo do conhecimento como uma atividade humana, compreendendo, sobretudo:

> [...] as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; as necessidades práticas, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão de ideias e teorias; as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p. 33).

A partir desses pressupostos, os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Acre (Ufac), bolsistas do Programa de Educação Tutorial (PET), vêm desenvolvendo pequenos projetos, orientados por procedimentos metodológicos que utiliza o contexto do desenvolvimento histórico da Matemática, explorando, sobretudo, aspectos relacionados a conceitos que, após serem ressignificados, são difundidos no ambiente acadêmico.

Nesta comunicação apresentaremos os resultados de dois desses projetos. O primeiro denominado de "Transformação de figuras curvas segundo o método de Arquimedes", e o segundo com o título "Descartes e o pensamento geométrico do século XVII".

2. Projetos: desenvolvimento histórico da matemática

Em "Transformação de figuras curvas segundo o método de Arquimedes" os alunos tomaram como aporte teórico metodológico o estudo sobre a construção e a compreensão do pensamento presente no processo de resolução da quadratura da parábola, realizado por Arquimedes de Siracusa (287 a. C – 212 a. C.). Para isso, realizaram uma revisão de literatura em artigos disponíveis na internet e em livros de história da matemática, dentre os quais, Roque (2012), Eves (2004), Boyer (1999) e "Os elementos", obra de autoria atribuída a Euclides (330 a. C), traduzida por Bicudo (2009).

Neste projeto investigou-se, principalmente, o método desenvolvido por Arquimedes, no que diz respeito a quadrar uma parábola, baseando-se no conhecido método "de exaustão", atribuído por Eudoxo (355-408 a.C), segundo o qual, multiplicando-se o número de lados apresentados por polígonos de n lados, inscritos e circunscritos ao círculo, torna-se possível uma aproximação da área desse círculo. Dito de outra maneira o método da exaustão consiste em encontrar áreas de figuras planas inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma de suas áreas converge para a área da figura desejada. Se a sequência for corretamente construída, a diferença entre o n-ésimo polígono e a figura que os contém se tornará arbitrariamente pequena a medida que n se tornar grande. A medida que essa diferença se torna arbitrariamente pequena, os valores possíveis para a área da figura

Doutor em Educação Matemática. Professor da UFAC dede 1989. E-mail: ronaldo.ufac@gmail.com

são sistematicamente "exauridos" pela limitação inferior imposta pelos polígonos cada vez maiores.

Em relação à quadratura da parábola – problema derivado da quadratura do círculo, o estudo desenvolvido pelos alunos evidenciou diversas propriedades importantes dessa curva e a possibilidade de resolução de outros problemas, proporcionando o processo de invenção de outros conhecimentos matemáticos, dentre os quais o cálculo diferencial e integral, largamente utilizado nos cursos de Matemática, Engenharias, Física, etc., para resolver problemas diversos, particularmente de velocidade, áreas e volumes.

Os alunos ficaram encantados com o processo de desenvolvimento da técnica de transformação de figuras curvas em figuras equivalentes, o qual faz parte de alguns desafios herdados dos antigos gregos, especialmente em relação a um dos três grandes problemas propostos – a quadratura do círculo, que, segundo proposição, deveria ser resolvido com régua e compasso. Os alunos descobriram, também, que a tentativa, sem sucesso, de resolução desse problema, por mais de 2000 anos, gerou outros conhecimentos em Matemática.

Os alunos envolvidos com esse projeto compreenderam que Arquimedes ao estudar, por exemplo, a quadratura da parábola, ofereceu bases para diversas aplicações, presentes atualmente nas tecnologias modernas. Pois partido da ideia de que *a parábola é uma curva com um foco e que a partir de um ponto qualquer dessa parábola podemos traçar um segmento de reta paralelo ao eixo da parábola, no qual este segmento encontra a parábola num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo foco. Assim, esta propriedade faz com que a parábola tenha várias aplicações prática* [QUEIRO, 2016].

Imagem 1

Imagem 2

Fonte: Google-Imagens.

Na prática, esse fato, ilustrado na Imagem 1, é aplicado nas antenas parabólicas (Imagem 2), que concentram em um aparelho receptor os sinais vindos de um satélite de televisão, de uma telefonia móvel ou de um GPS, sendo ainda aplicado ao mecanismo de funcionamento de faróis de automóveis e motocicletas, quando uma lâmpada é colocada no foco de uma superfície parabólica.

Os alunos envolvidos na investigação desse tema evidenciaram que o processo de estudo concebido a partir do contexto do desenvolvimento histórico da Matemática, especialmente quanto à transformação de figuras curvas em figuras equivalentes, praticado na antiga Grécia, proposto para estudos na atualidade, pode motivar um ambiente fértil de descobertas, contribuindo não só para uma formação científica, mas, sobremodo, para uma formação pedagógica de futuros professores de Matemática.

O projeto, "Descartes e o pensamento geométrico do século XVII", teve como objetivo investigar a gênese de criação da Geometria Analítica, presente na obra de René Descartes, buscando compreender o pensamento deste notável geômetra a partir de um ponto de vista do desenvolvimento histórico e relacionando-o com o

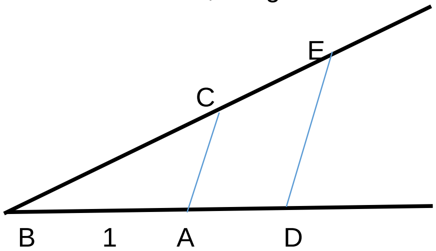
Doutor em Educação Matemática. Professor da UFAC dede 1989. E-mail: ronaldo.ufac@gmail.com

contexto dessa Geometria, estudada na atualidade. Para isso, os alunos analisaram parte da literatura que trata desse tema, assim como informações disponibilizadas na internet, além da realização de seminários no ambiente do curso de Matemática, com o propósito de desencadear um processo de mobilização e possível aprimoramento de seus colegas em relação às principais ideias que fundamentaram esse novo campo geométrico, no qual se pode vislumbrar o estudo da Geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise, conhecidos atualmente.

De um ponto de vista pedagógico, o projeto teve como objetivo promover uma reflexão no sentido de relacionar o pensamento geométrico atual com os processos de constituição e evolução da Geometria Plana e Analítica, focalizando o pensamento geométrico de René Descartes como marco de ligação da álgebra com a geometria.

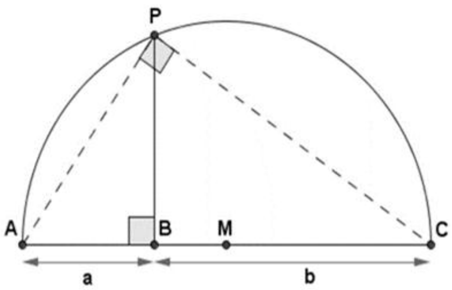
Durante o processo de investigação os alunos verificaram que para os geômetras gregos "a variável representava um comprimento, o produto de duas variáveis, a área, o produto de três variáveis, o volume e o produto de quatro ou mais variáveis não tinha significado" (VAZ, 2001). Encontraram, também, em Vaz (2001), que na nova geometria, "Descartes introduz o segmento unitário tornando possível e dando significado a muitos problemas que eram intransponíveis para os gregos, como é o caso da dimensionalidade" e que" enxergava o símbolo a^2 como o comprimento de um segmento e não como área. Buscaram compreender as razões que levaram Descartes a introduzir uma nova simbologia que permitiu um avanço no campo da notação, a qual escreve a+b para a soma de dois segmentos de comprimentos a e b, a-b para a diferença, ab para o produto, a/b para o quociente, para a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ e $\sqrt{C.a^3 - b^3 + ab^2}$ para a raiz cúbica de $a^3 - b^3 + ab^2$, onde o C significa cúbica. Em síntese, os alunos se debruçaram sobre o método exposto por Descartes, composto, sobretudo, por três partes: nomear, equacionar e construir. Isso, ficou esclarecido, a partir de um seminário apresentado no ambiente do curso de matemática, no qual os alunos apresentam a seguinte situação:

> Seguindo o desenho da figura abaixo, Descartes faz o produto do seguimento BD pelo seguimento BC, tomando duas semirretas com mesma origem B e marcando em uma delas o segmento unitário AB. Traça um segmento de A até C e, em seguida, partindo de D, traça um outro segmento paralelo a AC que encontra a outra semirreta em E, determinando, assim, o segmento DE. Usando o Teorema de Tales, chega à conclusão de que BE = BD.BC.



> A divisão pode ser calculada por um processo semelhante à multiplicação; enquanto que para o cálculo da raiz quadrada, Descartes faz o posicionamento dos seguimentos unitário AB em linha reta e do segmento AC de medida a+b.

> Constrói a circunferência cujo centro é o ponto médio M do segmento a AC, como na figura ao lado. Em seguida, escreve o triângulo retângulo, levantando uma altura a partir do ponto B até P, o qual está sobre a circunferência do círculo construído e usa a relação $BP^2 = BC \times AB = BC \times 1 = BC$, determinando, dessa forma, a raiz quadrada.



Fonte: www.google.com.br

Doutor em Educação Matemática. Professor da UFAC dede 1989. E-mail: ronaldo.ufac@gmail.com

Assim, concluiu os alunos, que em oposição aos métodos adotados pelos gregos na resolução de problemas, especialmente os geométricos, Descartes propõe a utilização do método analítico, cuja essência é a seguinte:

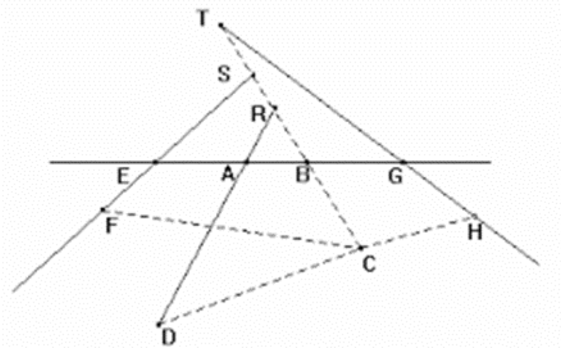
> Se quisermos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está encontrada, e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre estas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos de Equação, uma vez que os termos de uma destas duas expressões são iguais aos termos da outra (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 241).

Para Roque & Carvalho (2012), a grande novidade constituída a partir da geometria pensada, especialmente por Descartes, foi a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas. A introdução dessa ferramenta, fundamental para o projeto cartesiano, foi motivada inicialmente pelo problema de Pappus (290-350 d.C.), cujo enunciado diz respeito a:

> Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são traçados desde este ponto até três ou quatro retas dadas, formando com elas ângulos determinados, o produto de dois destes seguimentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas) (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 241).

Esse problema era conhecido pelos primeiros geômetras gregos. Euclides (300 a.C.), por exemplo, realizou uma demonstração considerando três e quatro retas. Pappus de Alexandria (290-350 d.C.), um dos mais importantes matemáticos da antiguidade, fez a generalização desse problema para um número arbitrário de retas. Aqui, os alunos reproduziram a resolução desse problema, conforme descreveu Vaz (2001), considerando 4 linhas:

> Sejam dadas as quatro linhas, AD, EF, GH, encontrar um ponto C, tal que, dados os ângulos x, y, z, t, linhas podem ser traçadas de C até AB, AD, EF, GH, fazendo ângulos x, y, z, t, respectivamente, tal que $CB.CF = CD.CH$, (veja figura 8). Mais ainda, traçar e conhecer a curva contendo tais pontos. Descartes inova o tratamento desse problema, reduzindo-o a duas variáveis, o que permite, atribuindo-se valores a uma delas, determinar os valores correspondentes da outra e, a partir daí, conhecer o lugar geométrico dos pontos.



Primeiro suponho o problema resolvido e, para sair da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que há que encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designe x o segmento da linha AB compreendido entre os pontos A e B; e seja CB designado por y; e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também estas duas, prolongadas se necessário e se não lhes são paralelas; como se vê elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Ora bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção que há entre os lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b; de maneira que representando AB por x, RB será $\frac{bx}{z}$ e a linha total CR será $y+\frac{bx}{z}$, pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria $CR = y-\frac{bx}{z}$ e se caísse entre B e R, seria $CR = -y-\frac{bx}{z}$. Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CD, que indico como z para c, de modo que sendo $CR = y+\frac{bx}{z}$, será $CD = \frac{cy}{z}+\frac{bcx}{z^2}$. Após isto, como as linhas AB, AD e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando-a por k, ter-se-á EB igual a $k+x$; que seria $k-x$ se o ponto B caísse entre E e A; e $-k+x$ se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como z está para d, tem-se: $BS = \frac{dk+dx}{z}$ e a linha $CS = \frac{zy+dk+dx}{z}$. Se o ponto S caísse entre B e C seria $CS = \frac{zy-dk-dx}{z}$; e quando C cai entre B e S teremos $CS = \frac{-zy+dk+dx}{z}$ Além disso os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e portanto é dada a proporção de CS para CF, que é como z para e, e será $CF = \frac{ezy+dek+dex}{z^2}$. Analogamente, AG ou l é dada e BG é $l-x$, pois que no triângulo BGT é também conhecida a proporção $BG:BT = z:t$, teremos: $BT = \frac{fl-fx}{z}$, sendo $CT = \frac{zy+fl-fx}{z}$. Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como z para g, tem–se $CH = \frac{gxy+fgl-fgx}{z^2}$. Substituindo em $CB.CF = CD.CH$, obtemos uma equação do segundo grau em x e y. Atribuindo um valor a uma das variáveis, encontramos a segunda. Como isso pode ser feito indefinidamente, encontraremos uma infinidade de pontos e, a partir deles, poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico (VAZ, 2001 p. 6-7).

Doutor em Educação Matemática. Professor da UFAC dede 1989. E-mail: ronaldo.ufac@gmail.com

A resolução do problema de Pappus, dada por Descartes, é reconhecida pela comunidade científica como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica, a qual se utiliza da álgebra e da análise.

Os alunos compreenderam que ao reduzirmos, a partir do estudo de Descartes, o problema de Pappus a duas retas concorrentes num ponto, estamos diante de um sistema de coordenadas, considerado que a base da Geometria Analítica possibilita o estudo das figuras geométricas, quando estas estão associadas a um sistema de coordenadas, no qual as figuras podem ser representadas de pares ordenados, equações ou inequações.

Com as atividades realizadas, no ambiente do curso de matemática, pôde-se evidenciar um considerável grau de envolvimento dos participantes na realização deste estudo, sobretudo em relação ao processo de investigação desse novo campo geométrico, constituído a partir do século XVII.

3. Considerações Finais

Com relação aos conceitos matemáticos possíveis de serem estudados a partir do desenvolvimento histórico pode ser dada relevância ao processo de invenção, ou, como queira, da produção da ideia que motivou a proposição e/ou a resolução de problemas, evidenciando-se o processo de criação, a evolução e também, conforme o caso, de transformação do conceito considerado.

O aluno envolvido em projetos dessa natureza pode, como nos exemplos mencionados no corpo deste texto, estudar, na atualidade, em que contexto a ideia ou o conceito deve ser aplicado, o que, certamente, contribui para uma aprendizagem mais significativa, sobretudo quando se tratar do processo de formação docente.

O estudo realizado se coaduna com o referencial teórico apresentado no início da investigação, posto que de fato os alunos envolvidos passam a ver a matemática como uma construção da humanidade e sente-se desafiados a investigar pensamentos, métodos e técnicas que conduziram esse importante campo científico a se constituir ao logo de sua história.

4. Referências Bibliográficas

BOYER, Carl B**. História da Matemática.** Tradução: Elza F. Comide. Editora Edgard Brücher, 2ª edição, São Paulo – 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DESCARTES, René. ***A Geometria****.* Trad. Emídio C. de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

EUCLIDES**. Os elementos.** Tradução: Irineu Bicudo. Editora da UNESP, São Paulo, 2009.

EVES, Howiard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

MACHADO, Nilson José. **Matemática língua materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 1998.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. História na Educação Matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

ROQUE, Tatiana**. História da Matemática: uma visão crítica desafiando mitos e lendas.** Editora ZAHAR, Rio de Janeiro 2012.

ROQUE. Tatiana e CARVALHO, João Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Site: https://www.google.com.br. Acesso nos dias 10 a 25 de agosto de 2015.

VAZ, Duelci Ap. **A Geometria**. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001. Disponível em http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223444007

Doutor em Educação Matemática. Professor da UFAC dede 1989. E-mail: ronaldo.ufac@gmail.com

VIANA, M. C. V.; SILVA, C. M. Concepções de Professores de Matemática sobre a utilização da História da Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem. In: ENCONTRO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Pôsteres... Belo Horizonte, 2007.

QUEIRO, João Felipe. **A elipse, a parábola e a hipérbole - propriedades e aplicações - Universidade de Coimbra**.

www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf. Acesso 20/01/2016.